

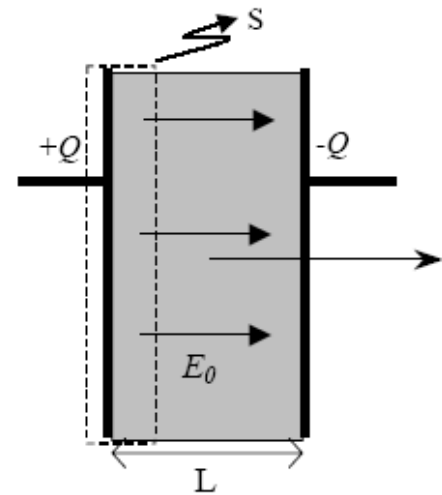
Problema 1

a) $L \ll R \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_0 = E_0 \hat{k} \\ E = 0 \text{ afuera.} \end{cases}$

Si se aplica la ley de Gauss en la superficie S de forma cilíndrica y que rodea a la placa con carga $+Q$:

$$D_0 \pi R^2 = Q \Rightarrow \epsilon E_0 \pi R^2 = Q \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{E}_0 = \frac{Q}{\pi \epsilon R^2} \hat{k} \\ \vec{P} = \chi \vec{E}_0 = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{Q}{\pi \epsilon R^2} \hat{k} \end{cases}$$



Sobre la placa con $+Q$: $\sigma_p^+ = \vec{P} \cdot (-\hat{k}) = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)Q}{\pi \epsilon R^2} \hat{k}$.

Sobre la placa con $-Q$: $\sigma_p^- = \vec{P} \cdot \hat{k} = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)Q}{\pi \epsilon R^2} \hat{k}$.

b) Sean (r, θ, ϕ) coordenadas esféricas con origen en el centro de la cavidad, como hay simetría en ϕ el potencial eléctrico dependerá sólo de r y θ : $\Phi = \Phi(r, \theta)$.

Si: $\begin{cases} \Phi_1 : \text{potencial en la cavidad.} \\ \Phi_2 : \text{potencial en el dieléctrico.} \end{cases}$ Se cumple: $\nabla^2 \Phi_1 = \nabla^2 \Phi_2 = 0$.

Sean: $\begin{cases} \Phi_1(r, \theta) = A_0 + B_0 r^{-1} + (A_1 r + B_1 r^{-2}) \cos \theta \\ \Phi_2(r, \theta) = A'_0 + B'_0 r^{-1} + (A'_1 r + B'_1 r^{-2}) \cos \theta \end{cases}$

- * $B_0 = B'_0 = 0$, porque no hay carga neta.
- * $B_1 = 0$, porque Φ_1 es continuo en la cavidad.

$$\Rightarrow \begin{aligned} \Phi_1(r, \theta) &= A_0 + A_1 r \cos \theta \\ \Phi_2(r, \theta) &= A'_0 + (A'_1 r + B'_1 r^{-2}) \cos \theta \end{aligned}$$

Condiciones de borde:

* Si $r \gg a$ debe ser: $\vec{E} \cong E_0 \hat{k} \Rightarrow \Phi_2 \cong -E_0 z + cte = -E_0 r \cos \theta + cte$

$$\Rightarrow A'_1 = -E_0 = -\frac{Q}{\pi \epsilon R^2}$$

* $\Phi_1(r = a, \theta) = \Phi_2(r = a, \theta) \quad \forall \theta \Rightarrow A_0 + A_1 a \cos \theta = A'_0 + (A'_1 a + B'_1 a^{-2}) \cos \theta \quad \forall \theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 = A'_0 & \rightarrow \text{se puede elegir: } A_0 = A'_0 = 0. \\ A_1 a = A'_1 a + B'_1 a^{-2} & \rightarrow A_1 = A'_1 + B'_1 a^{-3} \quad (1) \end{cases}$$

$$* \quad \vec{D}_{2n}|_a - \vec{D}_{1n}|_a = \sigma_L = 0$$

$$\text{Es: } \vec{E}_1 = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\hat{e}_\theta = -A_1 \cos\theta \hat{e}_r + A_1 \text{sen}\theta \hat{e}_\theta = -A_1 \hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = -(A'_1 - 2B'_1 r^{-3}) \cos\theta \hat{e}_r + (A'_1 + B'_1 r^{-3}) \text{sen}\theta \hat{e}_\theta$$

$$\vec{D}_1 = \epsilon_0 \vec{E}_1 \quad \vec{D}_2 = \epsilon \vec{E}_2 \quad \hat{n} \equiv \hat{e}_r$$

$$\Rightarrow -\epsilon(A'_1 - 2B'_1 a^{-3}) \cos\theta = -\epsilon_0 A_1 \cos\theta \rightarrow \epsilon_0 A_1 = \epsilon A'_1 - 2\epsilon B'_1 a^{-3} \quad (2)$$

$$\text{De (1) y (2): } \epsilon_0 A'_1 + \epsilon_0 B'_1 a^{-3} = \epsilon A'_1 - 2\epsilon B'_1 a^{-3} \Rightarrow B'_1 = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon + \epsilon_0} a^3 A'_1$$

$$B'_1 = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon + \epsilon_0} a^3 E_0$$

$$\text{De (1): } A_1 = -E_0 - \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon + \epsilon_0} E_0 = -\frac{3\epsilon}{2\epsilon + \epsilon_0} E_0$$

$$\therefore \vec{E}_1 = \frac{3\epsilon}{2\epsilon + \epsilon_0} E_0 \hat{k}$$

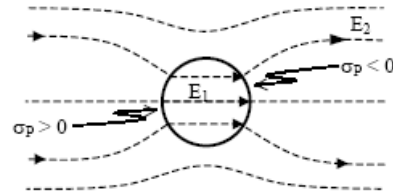
$$\text{c) } \sigma_p = \vec{P}_2|_a \cdot \hat{n} = \vec{P}_2|_a \cdot (-\hat{e}_r)$$

$$\vec{P}_2|_a = \chi \vec{E}_2|_a = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_2|_a$$

$$\Rightarrow \sigma_p = -(\epsilon - \epsilon_0)(A'_1 - 2B'_1 a^{-3}) \cos\theta \hat{e}_r \cdot (-\hat{e}_r) = (\epsilon - \epsilon_0)(A'_1 - 2B'_1 a^{-3}) \cos\theta$$

$$= (\epsilon - \epsilon_0) E_0 \left(-1 + \frac{2(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon + \epsilon_0} \right) \cos\theta$$

$$\therefore \sigma_p = -3 \frac{\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)}{2\epsilon + \epsilon_0} E_0 \cos\theta$$



Problema 2

a) El campo se obtiene por integración directa: $\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \hat{k}$

b) A partir del campo se puede calcular la diferencia de potencial para dos puntos sobre el eje z:

$$\varphi(0) - \varphi(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + a^2} - a)$$

Para que la partícula no llegue a $z = 0$ su energía cinética debe ser menor que la variación de energía potencial:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 < q[\varphi(0) - \varphi(z)] \quad \text{o sea} \quad v_0^2 < \frac{q\sigma}{m\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + a^2} - a)$$

esta condición no se cumple nunca si el plano y la partícula tienen cargas de signo opuesto.